Analysis I

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Vorwort

Dieses "Skript" wurde unter Verwendung meiner Notizen verfasst. Es dient der Möglichkeit, den Stoff der Vorlesung Analysis I zu wiederholen.
Ich werde es während des Semester mit dem neuen Stoff aktualisieren.

Ich kann weder Vollständigkeit noch Korrektheit des Skriptes garantieren: kleine Fehler können enthalten sein.
Deshalb bin ich dankbar, wenn mir Fehler gemeldet werden, so dass ich sie korrigieren kann.
Für Verbesserungsvorschläge bin ich natürlich auch offen.

Ich möchte mich bei allen Personen, die mir bei der Erstellung dieses Skriptes geholfen haben, bedanken.

Ich wünsche euch viel Spass mit Analysis I!

20. August 2015 Nicolas Lanzetti, lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen **5**
- 1.1 Notation . . . 5
- 1.2 Eigenschaften . . . 5

2 Folgen **6**
- 2.1 Eigenschaften . . . 6
  - 2.1.1 Beschränktheit . . . 6
  - 2.1.2 Monotonie . . . 6
  - 2.1.3 Konvergenz . . . 6
- 2.2 Grenzwerte von Folgen . . . 6
  - 2.2.1 Rechenregel mit Grenzwerte . . . 6
- 2.3 Geometrische Folge und geometrische Reihe . . . 7

3 Funktionen **8**
- 3.1 Grenzwerte von Funktionen . . . 8
  - 3.1.1 "Typische" und wichtige Grenzwerte . . . 8
  - 3.1.2 Rechenregel für Grenzwerte . . . 8
- 3.2 Stetigkeit . . . 9
- 3.3 Der Zwischenwertsatz fur stetige Funktionen . . . 9
- 3.4 Die inverse Funktion . . . 9
- 3.5 Asymptoten . . . 10

4 Differentialrechnung **11**
- 4.1 Ableitungsregeln . . . 11
- 4.2 Linearisieren, Fehlerrechnung . . . 12
- 4.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . 12
- 4.4 Regel von Bernoulli-Hôpital . . . 12
- 4.5 Hyperbolische Funktionen . . . 12
  - 4.5.1 Eigenschaften und Ableitungen . . . 12
  - 4.5.2 Inverse Funktionen . . . 12
- 4.6 Ableitungen und Graphen von Funktionen . . . 13
- 4.7 Ebene Kurven . . . 13
  - 4.7.1 Tangente an der Punkt (x_0, y_0): . . . 13
  - 4.7.2 Krümmung . . . 14

5 Integralrechnung **15**
- 5.1 Hauptsatz der Integralrechnung . . . 15
  - 5.1.1 Unbestimmtes Integral . . . 15
  - 5.1.2 Bestimmtes Integral . . . 15
- 5.2 Integrationsregeln . . . 15
- 5.3 Partielle Integration . . . 15
- 5.4 Substitutionsmethode . . . 16
- 5.5 Integrale von rationellen Funktionen . . . 16
  - 5.5.1 Partialbruchzerlegung . . . 16
- 5.6 Uneigentliche Integrale . . . 17

6 Anwendung der Integralrechnung **18**
- 6.1 Sektorfläche . . . 18
- 6.2 Bogenlänge . . . 18
- 6.3 Volumenberechnung . . . 18
- 6.4 Oberflächenintegral . . . 18

6.5 Trägheitsmoment 19
6.6 Schwerpunkt 19

1 Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten.
Eine Menge kann auf zwei Arten dargestellt werden:

1. Elemente aufzählen (z.B. $A = \{1, 2, 10\}$)
2. Elemente durch eine Regel oder Eigenschaft festlegen (z.B. $A = \{x : x < 1\}$)

1.1 Notation

Seien A und B zwei Mengen, dann gilt:

- $x \in A$: x gehört zu A
- $x \notin A$: x gehört nicht zu A
- $A \subset B$: A Teilmenge von B

1.2 Eigenschaften

Seien A und B zwei Mengen, dann gilt:

- **Schnittmenge**: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$
- **Vereinigung**: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- **Differenz**: $A/B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- **Produktmenge**: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

2 Folgen

Definition. Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in reelle Zahlen.

Eine Folge kann auf verschiedene Arten dargestellt werden:

1. geschlossene Formel (z.B. $a_n = 3 \cdot n$)
2. rekursive Formel (z.B. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2 \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$)
3. andere Weise

2.1 Eigenschaften

2.1.1 Beschränktheit

Eine Zahlenfolge ist beschränkt genau dann, wenn es eine obere (bzw. untere) Schranke s gibt, für welche gilt: $s >$ (bzw. $<$) $a_n \; \forall n$

2.1.2 Monotonie

- Eine Folge ist monoton wachsend falls gilt: $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n$ (strikt falls $a_{n+1} > a_n \; \forall n$)
- Eine Folge ist monoton fallend falls gilt: $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n$ (strikt falls $a_{n+1} < a_n \; \forall n$)

2.1.3 Konvergenz

Eine Folge a_n konvergiert gegen den Grenzwert L falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index m gibt, sodass

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

Falls eine Folge nach $L = 0$ strebt, heisst sie Nullfolge (z.B. $a_n = \frac{1}{n^2}$)
Eine Folge die konvergiert heisst **konvergent**, sonst heisst sie **divergent**.

Satz. *Ist eine Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.*

Beispiel. Ist die Folge $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$ beschränkt, monoton und/oder konvergent?
$a_n = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad (n \geq 1)$
Die Folge $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ ist monoton fallend und beschränkt, so konvergiert sie (gegen $\frac{1}{2}$).

2.2 Grenzwerte von Folgen

Definition. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ oder $a_n \to L \; (n \to \infty)$

2.2.1 Rechenregel mit Grenzwerte

Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

Beispiel. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+10}{3n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{10}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{3}$

2.3 Geometrische Folge und geometrische Reihe

Eine Folge der Form $a_0 = a, a_1 = a \cdot q, \ldots, a_n = a \cdot q^n$ heisst geometrische Folge.

- $|q| > 1 : |a_n| = |a| \cdot |q|^n$ (nicht beschränkte Folge)
- $|q| < 1 : a_n \to 0$

Sei $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, dann divergiert die Folge für $|x| > 1$ und konvergiert gegen $\frac{1}{1-x}$ für $|x < 1|$.

3 Funktionen

Eine Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

mit **Definitionsbereich** $D(f) = A$ und **Wertebereich** $W(f) = B$ ist...

- **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$
- **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$
- **injektiv**, falls $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$
  Graphisch: Jede Parallele zur x-Achse schneidet $\Gamma(f)$ in höchstens einem Punkt
- **surjektiv**, falls $f(A) = B$, das heisst für jede $b \in B$ gibt es mindestens ein $a \in A$
- **bijektiv**, falls $f(x)$ sowohl injektiv als surjektiv ist
- **monoton wachsend**, falls $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2) \, \forall x_1, x_2 \in D(f)$ (**strikt** falls $f(x_1) < f(x_2)$)
- **monoton fallend**, falls $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2) \, \forall x_1, x_2 \in D(f)$ (**strikt** falls $f(x_1) > f(x_2)$)

Beispiel. $f(x) = x \cdot \cos(x)$ ist ungerade: $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cdot \cos(x) = -f(x)$.

3.1 Grenzwerte von Funktionen

3.1.1 "Typische" und wichtige Grenzwerte

- $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x\to\infty} c = c$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3.1.2 Rechenregel für Grenzwerte

Seien $\lim_{x\to\xi} f(x) = a$ und $\lim_{x\to\xi} g(x) = b$, dann gilt (falls diese Grenzwerte existieren):

- $\lim_{x\to\xi} f(x) \pm g(x) = a \pm b$
- $\lim_{x\to\xi} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$
- $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

Beispiel. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$

Beispiel. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \overset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) =$
$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin(y)} \cos(y) = = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}} \cdot \lim_{y\to 0} \cos(y) = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}} \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1$

3.2 Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle ξ_0 stetig falls $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Eine Funktion heisst stetig, falls sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereich $D(f)$ stetig ist.

Beispiel. Ist $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{für } x \geq 0 \\ x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ stetig?

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - e^x = 1 - 1 = 0$

So ist $f(0) = 0$ und deshalb ist $f(x)$ stetig.

3.3 Der Zwischenwertsatz fur stetige Funktionen

Satz. *Es sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f wenigstens eine Nullstelle in $[a;b]$.*

Beispiel. Man zeige, dass die Gleichung $e^{\sin(x)} = x^2$ mindestens eine Lösung besitzt.
Definieren wir $f(x) = e^{\sin(x)} - x^2$: $f(x)$ hat eine Nullstelle $\leftrightarrow e^{\sin(x)} = x^2$ hat eine Lösung.

1. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-1} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{e} - \frac{\pi^2}{4} < 0$
2. $f(0) = e^0 - 0^2 = 1 > 0$

Da $f(x)$ stetig ist, gibt es mindestens ein $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, für das $f(x) = 0$ gilt. Das heisst, die Gleichung $e^{\sin(x)} = x^2$ mindestens eine Lösung besitzt.

3.4 Die inverse Funktion

Sei $f(x)$ eine injektive Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & W(f) & \to & D(f) \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

die inverse Funktion (oder Umkehrfunktion) von $f(x)$.

Bemerkung. Für eine invertierbare Funktion $f(x)$ gilt:

- $D(f^{-1}) = W(f) \leftrightarrow D(f) = W(f^{-1})$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$
- $\Gamma(f^{-1})$ ist eine Spiegelung an der Gerade $y = x$ von $\Gamma(f)$

Beispiel. Man bestimme die inverse Funktion sowie ihren Definitionsbereich $D(f)$ und ihren Wertebereich $W(f)$ von den folgenden Funktionen:

1. $f_1(x) = (3x + 4)^3$
2. $f_2(x) = \sin(2x)$

Lösung:

1. $y = (3x + 4)^3 \leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 3x + 4 \leftrightarrow x = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt[3]{y} - 4) = f_1^{-1}(y)$
   $D(f_1) = W(f_1) = \mathbb{R}$. Daraus folgt: $D(f_1^{-1}) = W(f_1^{-1}) = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \sin(2x)$ ist im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = D(f)$ injektiv und besitzt (auf diesem Intervall) deshalb eine Inverse.
   $y = \sin(2x) \leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \arcsin(y) = f_2^{-1}(y)$
   $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = W(f_2^{-1})$ und $W(f_2) = [-1, 1] = D(f_2^{-1})$

3.5 Asymptoten

Eine Funktion $g(x)$ heisst Asymptote der Funktion $f(x)$ falls gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=0$$

Beispiel. Finden Sie die Asymptoten der folgenden Funktionen:

1. $f_1=\frac{x+1}{x}$
2. $f_2(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$
3. $f_3(x)=\frac{3x^3-x+2}{x^2+3x+4}$

Lösung:

1. $f_1=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ Somit ist $g_1(x)=1$ eine Asymptote von $f_1(x)$. Es gilt nämlich: $\lim_{x\to\pm\infty}(f_1(x)-g_1(x))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$
   Die Funktion hat ausserdem eine Polgerade: $x=0$ (da $\lim_{x\to 0}f_1(x)=\pm\infty$)

2. $f_2(x)=\frac{x^2-2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{-1}{x-1}=x+1-\frac{1}{x-1}$
   Somit ist $g_2(x)=x+1$ eine Asymptote von $f_2(x)$. Es gilt nämlich:
   $\lim_{x\to\pm\infty}(f_2(x)-g_2(x))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1-\frac{1}{x-1}-(x+1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x-1}\right)=0$
   Die Funktion hat ausserdem eine Polgerade: $x=1$ (da $\lim_{x\to 1}f_2(x)=\pm\infty$)

3. $f_3(x)=\frac{3x^3-x+2}{x^2+3x+4}=\frac{3x(x^2+3x+4)}{x^2+3x+4}+\frac{-9x^2-13x+2}{x^2+3x+4}=3x-\frac{9(x^2+3x+4)}{x^2+3x+4}+\frac{14x+38}{x^2+3x+4}=3x-9+\frac{14x+38}{x^2+3x+4}$
   Somit ist $g_3(x)=3x-9$ eine Asymptote von f_3. Es gilt nämlich:
   $\lim_{x\to\pm\infty}(f_3(x)-g_3(x))=\lim_{x\to\pm\infty}(3x-9+\frac{14x+38}{x^2+3x+4}-3x+9)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{14x+38}{x^2+3x+4}\right)=0$

4 Differentialrechnung

Die Ableitung von $f(x)$ wird mit dem Grenzwert

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

definiert. Falls dieser Grenzwert nicht existiert, ist $f(x)$ nicht differenzierbar.

4.1 Ableitungsregeln

- **Linearität:**

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

- **Produktregel:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

- **Quotientregel:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$

- **Kettenregel:**

$$(f(g(x))' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- **Ableitung der inversen Funktion:**

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- **Wichtige Ableitungen:**
Trigonometrie: $(\sin(x))' = \cos(x)$ $\quad (\cos(x))' = -\sin(x)$ $\quad (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ Exponetial: $(e^x)' = e^x$ $\quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{(\alpha-1)}$

Beispiel. Man finde die Ableitung der folgenden Funktionen:

1. $f_1(x) = (1-x)^5$
2. $f_2(x) = (\sqrt{x} + \cos(x))^{18}$
3. $f_3(x) = x^x$
4. $f_4(x) = \arccos(2x)$

Lösung:

1. $g_1(x) = 1 - x \quad h_1(x) = x^5 \quad g_1'(x) = -1 \quad h_1'(x) = 5 \cdot x^4$
$f_1'(x) = (h_1(g_1(x))' = h_1'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) = 5 \cdot (1-x)^4 \cdot (-1) = -5 \cdot (1-x)^4$

2. $g_2(x) = x^{\frac{1}{2}} + \cos(x) \quad h_2(x) = x^{18} \quad g_2'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \sin(x) \quad h_2'(x) = 18 \cdot x^{17}$
$f_2'(x) = (h_2(g_2(x))' = h_2'(g_2(x)) \cdot g_2'(x) = 18 \cdot (\sqrt{x} + \cos(x))^{17} \cdot (\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \sin(x))$

3. $f_3(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}$
$g_3(x) = x \cdot \ln(x) \quad h_3(x) = e^x \quad g_3'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \quad h_3'(x) = e^x$
$f_3'(x) = (h_3(g_3(x))' = h_3'(g_3(x)) \cdot g_3'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$

4. $f_4(x)$ ist die Inverse von $h_4(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(x) \quad h_4'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin(x)$
$f_4'(x) = \frac{1}{h_4'(f_4(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{2} \cdot \sin(\arccos(2x))} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(2x))}} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

4.2 Linearisieren, Fehlerrechnung

Die lineare Ersatzfunktion von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

und entspricht der Gleichung der Tangente an $f(x)$ in x_0.
Absoluter Fehler: $|\Delta f| \cong |df| = |f'(x) \cdot dx| \leftrightarrow f(x + dx) \cong f + df = f(x) + f'(x) \cdot dx$
Relativer Fehler: $\frac{\Delta f}{f} \cong \frac{df}{f}$

Beispiel. Man bestimme eine Näherung von $\sqrt[3]{1000 - \varepsilon}$ mit kleinem ε.
$f(x + h) \cong f(x) + f'(x) \cdot h \to f(x) = \sqrt[3]{x} \to f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
$f(1000 - \varepsilon) \cong 10 - \frac{1}{3} \cdot 1000^{-\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon = 10 - \frac{\varepsilon}{300}$

4.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz. *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige und auf dem Intervall (a, b) differenzierbare Funktion, dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a) \Longleftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4.4 Regel von Bernoulli-Hôpital

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder mit $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung. Im Fall “$a = \pm\infty$” kann man die Regel auch anwenden.

Beispiel. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

Beispiel. $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{(x\cdot\ln(x))} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x))}$ (da e^x stetig ist)
$\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{1} = 0$
Deshalb ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x))} = e^0 = 1$

Bemerkung. Das zeigt nicht, dass $0^0 = 1$. Es geht nur um einen Grenzwert.

4.5 Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4.5.1 Eigenschaften und Ableitungen

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x) \qquad (\tanh(x))' = 1 - \tanh^2(x)$

4.5.2 Inverse Funktionen

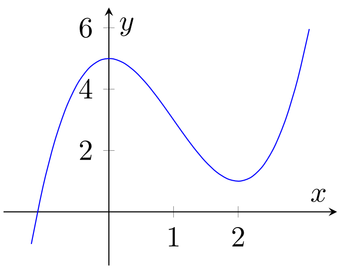
$$\text{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \qquad \text{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \qquad \text{artanh}(y) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

4.6 Ableitungen und Graphen von Funktionen

- $f'(x) > 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ **steigend** auf (a, b)
- $f'(x) < 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ **fallend** auf (a, b)
- $f'(x_0) = 0 \iff x_0$ heisst mögliche Extremalstelle:
  - $f''(x_0) > 0 : x_0$ ist eine Minimalstelle
  - $f''(x_0) < 0 : x_0$ ist eine Maximalstelle
- $f''(x) > 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ ist **konvex** auf (a, b)
- $f''(x) < 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ ist **konkav** auf (a, b)
- $f''(x_0) = 0, f(x)$ konkav auf (a, x_0) und konvex auf (x_0, b) (oder umgekehrt), dann heisst x_0 **Wendepunkt**

Beispiel. Man bestimme Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.
Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 6x = x \cdot (3x - 6) \qquad f''(x) = 6x - 6$

- $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, so ist $x = 0$ eine (lokale) Maximalstelle (Maximum $f(0) = 5$)
- $f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$, so ist $x = 2$ eine (lokale) Minimalstelle (Minimum $f(2) = 1$)
- $f''(1) = 0$, $f(x)$ konkav im $(-\infty, 0)$ und konvex im $(0, \infty)$, so ist $x = 1$ ein Wendepunkt



4.7 Ebene Kurven

Ebene Kurven können auf verschieden Arten dargestellt werden:

- **Parameterdarstellung**: $t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ (z.B. $t \mapsto (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t))$)
- **Implizite Darstellung**: $k = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = 0\}$ (z.B. $x^2 + y^2 = R^2$)
- **Explizite Darstellung**: $x \mapsto y(x)$ (z.B. $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$)

Bemerkung. Es ist möglich, dass einige Kurven nicht auf alle drei beschriebene Arten sich darstellen lassen.

Ableitung eines Vektors:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

4.7.1 Tangente an der Punkt (x_0, y_0):

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \cdot (x(t) - x(t_0)) = y(t)$$

4.7.2 Krümmung

Die Krümmung einer Kurve ist gegeben durch:

$$k(t) = \frac{1}{\rho} = \frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2) - f(\varphi)f''(\varphi)}{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wobei ρ der Krümmungsradius ist.

Evolute (Ort der Zentren der Krümmungskreise):

$$x_M = x - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''} = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

$$y_M = y + \frac{(1+(y')^2)}{y''} = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

Beispiel. Man bestimme die Krümmung und den Krümmungsradius der Kurve mit der Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (\sin(t), \cosh(t))$ zum Zeitpunkt $t = 0$.
$\dot{x}(t) = \cos(t)$ $\quad \ddot{x}(t) = -\sin(t)$ $\quad \dot{y}(t) = \sinh(t)$ $\quad \ddot{y}(t) = \cosh(t)$
$k(t) = \frac{\cos(t)\cdot\cosh(t)+\sin(t)\cdot\sinh(t)}{(\cos^2(t)+\sinh^2(t))^{\frac{3}{2}}}$ $\quad k(0) = \frac{1+0}{1} = 1$ $\quad \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = 1$

5 Integralrechnung

5.1 Hauptsatz der Integralrechnung

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

5.1.1 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ mit } F'(x) = f(x)$$

Die Funktion $F(x)$ ist deshalb eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beispiel. Verifizierung von Integrale mit der Ableitung:

1. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ weil $(\frac{x^2}{2} + C)' = x$
2. $\int e^x dx = e^x + C$ weil $(e^x + C)' = e^x$
3. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$ weil $(\sin(x) + C)' = \cos(x)$

5.1.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \text{ mit } F'(x) = f(x)$$

5.2 Integrationsregeln

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5.3 Partielle Integration

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechung. Diese Methode löst kein Integral vollständig, sondern wandelt sie ein kompliziert zu integrierendes Produkt zweier Funktionen in eine Summe eines einfacheren Integrals und einer Funktion um.

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x)|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$$

Bemerkung. Die Funktion $u(x)$ sollte eine einfach integierbare Funktion sein und die Funktion $v(x)$ möglichst eine Polynomfunktion (z.B. x) sein, so dass sie nach der Ableitung einfacher wird (z.B. $(x)' = 1$).

Beispiel. Man bestimme die folgende Integrale:

1. $\int_0^\pi x\sin(x)dx$
2. $\int \ln(x)dx$

Lösung:

1. $u'(x)=\sin(x) \qquad u(x)=-\cos(x) \qquad v(x)=x \qquad v'(x)=1$
   $\int_0^\pi x\sin(x)dx = -\cos(x)x|_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos(x))dx = \pi + \int_0^\pi \cos(x)dx = \pi + \sin(x)|_0^\pi = \pi$
2. $u'(x)=1 \qquad u(x)=x \qquad v(x)=\ln(x) \qquad v'(x)=\frac{1}{x}$
   $\int \ln(x)dx = \ln(x)x - \int x\frac{1}{x}dx = \ln(x)x - \int dx = x\ln(x) - x + C$

5.4 Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode ist die Umkehrung der Kettenregel aus der Differentialrechnung. Sie wird oft angewandt, wenn der Integrand aus dem Produkt einer Funktion und deren innerer Ableitung besteht.

1. Substitution finden (auch in Tabellen in der Formelsammlung)
2. dx substituiren: $f'(x)=\frac{du}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{f'(x)}$
3. Substitution in das Integral einsetzen (auch die Integralsgrenze sind zu substituiren)
4. Integral lösen und rücksubstituiren

Beispiel. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ? \Longrightarrow u=f(x) \qquad \frac{du}{dx}=f'(x) \qquad dx=\frac{du}{f'(x)}$
Einsetzen liefert: $\int \frac{f'(x)}{u}\cdot\frac{du}{f'(x)} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$

Bemerkung. Diese Formel ist für alle $f(x)$ gültig.

5.5 Integrale von rationellen Funktionen

Integrale von rationalen Funktionen $f(x)/g(x)$ lassen sich mit der Methode der Partialzerlegung auf die folgende Integrale zurückführen:

- $\int \frac{1}{x+b}dx = \ln|x+b| + C$
- $\int \frac{1}{(x+b)^n}dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x+b)^{n-1}} + C$ mit $n\geq 2$
- $\int \frac{x+b}{x^2+2bx+c}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2bx+c| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} + C$
  ($c-b^2>0 \longleftrightarrow x^2+2bx+c$ keine reellen Nullstellen hat)
- $\int \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^n}dx = \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} + C$ mit $n\geq 2$
- $I_n = \int \frac{1}{(x^2+2bx+c)^n}dx = ?\ (c-b^2>0, n\geq 2)$
  $\rightarrow 2(n-1)(c-b^2)I_n = (2n-3)I_{n-1} + \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{n-1}}$

5.5.1 Partialbruchzerlegung

Beispiel. $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Longrightarrow 1 = A\cdot(x-3) + B\cdot(x-2)$

- $x=3 \Rightarrow 1 = A\cdot(3-3) + B\cdot(3-2) \Rightarrow B=1$
- $x=2 \Rightarrow 1 = A\cdot(2-3) + B\cdot(2-2) \Rightarrow A=-1$

Somit $\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \int\frac{1}{x-3}dx - \int\frac{1}{x-2}dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$

5.6 Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_a^\xi f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_\xi^a f(x)dx$$

Für eine auf $(a,b]$ stetige Funktion f ($a<b$) ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to a^+}\int_\xi^b f(x)dx$$

Für eine auf $[a,b)$ stetige Funktion f ($a<b$) ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to b^-}\int_a^\xi f(x)dx$$

Beispiel. Man bestimme die folgende Integrale.

1. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Lösung:

1. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{\xi\to\infty}\arctan x|_0^\xi = \lim_{\xi\to\infty}\arctan(\xi) = \frac{\pi}{2}$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\xi\to 1^-}\int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\xi\to 1^-}\arcsin(x)|_0^\xi = \lim_{\xi\to 1^-}\arcsin(\xi) - 0 = \frac{\pi}{2}$

6 Anwendung der Integralrechnung

6.1 Sektorfläche

$$F = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y} - \dot{x}y)dt \qquad F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(f(\varphi))^2 d\varphi$$

Falls die Kurve geschlossen ist:

$$F = -\int_{t_1}^{t_2}\dot{x}ydt = \int_{t_1}^{t_2}\dot{y}xdt$$

Fläche zwischen Kurve und x-Achse ($\dot{x} = \frac{dx}{dt} \to dx = \dot{x}dt$):

$$F = \int_a^b f(x)dx \qquad F = \int_{t_1}^{t_2}\dot{x}ydt$$

6.2 Bogenlänge

$$L = \int_{t_1}^{t_2}|\dot{\vec{r}}(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$$

Für eine Kurve $y = f(x)$ ist $\vec{r}(t) = (x, f(x))$, somit ist:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Für eine Kurve $\rho = f(\varphi)$ ist $\vec{r}(t) = (f(\varphi)\cdot\cos(\varphi), f(\varphi)\cdot\sin(\varphi))$, somit ist:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi$$

6.3 Volumenberechnung

Rotation um x-Achse (die Funktion $f(x)$ rotiert um die x-Achse):

$$V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2dx = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\dot{x}dt$$

Rotation um y-Achse (die Funktion $f(x)$ rotiert um die y-Achse):

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)dx = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} xy\dot{x}dt$$

6.4 Oberflächenintegral

Oberflīche eines Rotationskörpers um die x-Achse:

$$O = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

6.5 Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment eines eindimensionalen Körper (Stab):

$$\theta_y = \int_a^b x^2 \sigma dl \qquad \theta_x = \int_a^b y^2 \sigma dl \qquad \theta_p = \theta_x + \theta_y$$

Flächenträgheitsmoment (zweidimensionaler Körper) bez. y-Achse:

$$\theta_y = \rho \cdot \int_a^b x^2 F(x) dx$$

Flächenträgheitsmoment (zweidimensionaler Körper) bez. x-Achse:

$$\theta_x = \rho \int_a^b y^2 G(y) dx$$

$F(x)$ beschreibt die "Höhe" der Fläche als Funktion von x und $G(y)$ beschreibt die "Breite" der Fläche als Funktion von y.

Trägheitsmoment bez. x-Achse eines Rotationskörper um die x-Achse:

$$\theta_x = \frac{\pi\rho}{2} \int_a^b (f(x))^4 dx = \frac{\pi\rho}{2} \int_{t_1}^{t_2} y^4 \dot{x} dt$$

Bemerkung. Wie bei Volumen ist das Trägheitsmoment additiv.

6.6 Schwerpunkt

Der Schwerpunkt eines Körpers mit Fläche $A = \int_a^b F(x)dx$ ist:

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b xF(x)dx \qquad y_s = \frac{1}{A} \int_a^b yG(y)dx$$

Beispiel. Man bestimme die Koordinaten des Schwerpunktes des Einheitskreises mit Zentrum im Ursprung des Koordinatensystems.
Für $F(x)$ gilt ("Höhe" des Kreises als Funktion von x):

$$F(x) = 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

Somit erhält man:

$$A = \int_{-1}^1 F(x)dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \pi$$

$$x_s = \frac{1}{A}\int_{-1}^1 xF(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 2x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{2\cdot(1-x^2)^{3/2}|_{-1}^1}{3\pi} = 0$$

Aus Symmmetriegründen folgt: $y_s = x_s = 0$.